Tema 7: Integración

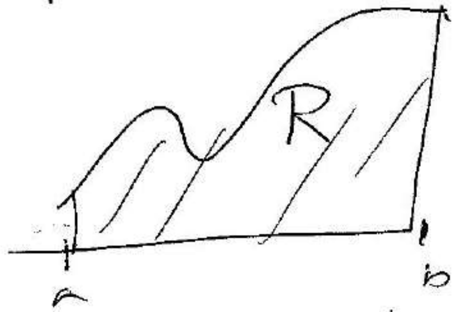
• Introducción:

Sea $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ una función continua

Queremos asociar a la función f un número $I = \int_a^b f(x)\,dx$ que cumpla:

i) Si $f \geq 0$, $I \geq 0$, y además I debe representar el área de $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

$$I = \text{"Área}(R)\text{"}.$$



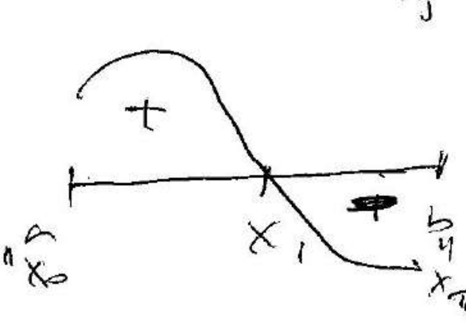
ii) Si f es continua en $[a,b]$ pero existen puntos $\underset{x_0}{\overset{\shortparallel}{a}} < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \underset{x_{k+1}}{\overset{\shortparallel}{b}}$ de modo que

f tiene signo constante en $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, k$,

entonces $I = \varepsilon_1 I_1 + \dots + \varepsilon_k I_k$,

con $I_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} |f(x)|\,dx$ y ε_j = signo de f en $[x_j, x_{j+1}]$

$$I = A(+) - A(-)$$



(iii) Si $a \leq x \leq b$, e $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$,

$I(x)$ es diferenciable con $I'(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$.

Para ello, el procedimiento que usaremos será dividir el intervalo $[a,b]$ usando particiones más y más finas:

<u>Def 1</u>: i) Sea $I = [a,b]$ $(a<b)$ Por <u>partición</u> P de $[a,b]$, entendemos un subconjunto finito y ordenado en orden creciente $P = \{x_j : 0 \leq j \leq n\}$ con $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ (así pues, P consta de $n+1$ puntos).

ii) Dada una partición P de $[a,b]$ con $n+1$ puntos, definimos los incrementos Δ_j como $\Delta_j = x_{j+1} - x_j$, $0 \leq j \leq n-1$ (observamos que $\Delta_j > 0$, $j = 0, \ldots, n-1$ y $\sum_{j=0}^{n-1} \Delta_j = b-a$)

<u>Def 2</u>: Sea $f: [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ continua en todo $x \in [a,b]$ y P una partición de $[a,b]$ $(P = \{x_j : 0 \leq j \leq n\})$

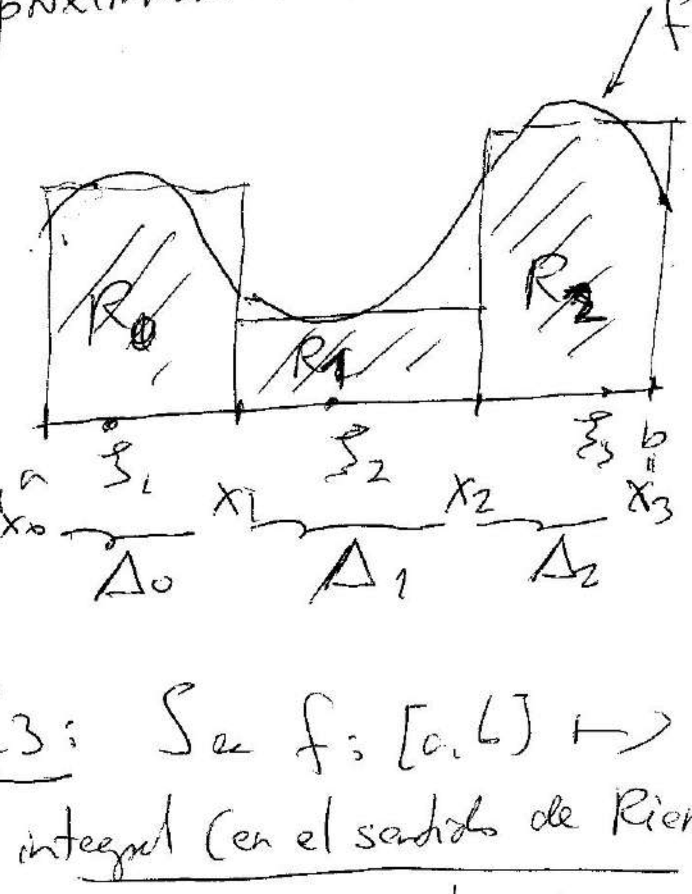
Entonces, definimos una <u>suma de Riemann</u> de f asociada a tal partición como $S_{P,Q}(f)$

dada por

$$S_{P,Q}(f) = \sum_{j=0}^{n-1}{}' f(\xi_j)\,\Delta_j\,,$$

siendo
$$\left|\begin{array}{l} \xi_j \in [x_j, x_{j+1}]\,, \quad j = 0,\ldots,n-1 \\ Q = \{\xi_j : j = 0,\ldots,n-1\} \end{array}\right.$$

- Tales sumas de Riemann $S_{P,Q}(f)$ pretenden ser aproximaciones al verdadero valor de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$



R_j : rectángulo de base Δ_j y altura $f(\xi_j)$; $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$

<u>Def3:</u> Sea $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ una función. <u>Por integral (en el sentido de Riemann)</u> de f, extendida al intervalo $[a,b]$ entenderemos $I = \int_a^b f(x)\,dx$ dada

por $I = \lim_{\Delta P \to 0} S_{P,Q}(f)$,

siendo para una partición P, $\Delta P := \max_{0 \le j \le n} \Delta_j$

(con $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

(Cuando decimos que $\exists \lim_{\Delta P \mapsto 0} S_{P,Q}(f)$, queremos que si P_n ($n=1,2 \ldots$) es una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\Delta(P_n) \mapsto 0$, entonces $\exists \lim_{n \mapsto \infty} S_{P_n, Q_n}(f)$, y además tal límite <u>no</u> depende de cómo se escoja la sucesión de particiones P_n)

<u>Prop 1</u>: Sea $f: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua. Entonces, $\exists \lim_{\Delta P \mapsto 0} S_{P,Q}(f)$ (que es, por definición, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$)

Para probar la <u>Prop 1</u> la herramienta fundamental es el siguiente resultado:

<u>Prop 2</u>: Sea $f: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua en cada $x \in [a,b]$ (intervalo cerrado y acotado). Entonces, dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $x, y \in [a,b]$ con $|x-y| \leq \delta$ $\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

<u>Def 3</u>: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ que cumple

que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $x, y \in A$ con $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Entonces f se dice uniformemente continua en A.

Obs: Con la continuidad a secas (que se dio no en un punto $x_0 \in A$), si damos $\varepsilon > 0$ el $\delta > 0$ que hace $|x - x_0| \leq \delta$ con $x \in A \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ depende a priori de ε y del punto x_0.
En la continuidad uniforme queremos poder elegir $\delta > 0$ independientemente de x_0).

Ejemplos, i) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $(0,1)$ es continua en todo un punto, pero no uniformemente continua (f deja de ser uniformemente continua por no ser acotada cerca de $x = 0$).

ii) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ $(x \in (0,1))$ tampoco es uniformemente continua (cerca de $x = 0$ oscila cada vez más fuertemente).

Postergaremos por ahora la prueba de que toda función continua $f: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ es automáticamente uniformemente continua, pero veamos su papel

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta P \to} S_{P,Q}(f).$$

<u>Dem (Prop 1)</u> i) Veamos primero que si f es continua en $[a,b]$, las sumas de Riemann $S_{P,Q}(f)$, donde se ha fijado P, varían muy poco con la elección de Q: para ello, si

$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ y $Q = \{\xi_j : j = 0, \dots, n-1\}$

$Q_P = \{x_j : j = 0, \dots, n-1\}$

(en Q_P en cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, n-1$ elegimos precisamente ξ_j = extremo inferior de $[x_j, x_{j+1}]$),

$$S_{P,Q}(f) - S_P(f) \qquad (\text{con } S_P(f) = S_{P,Q_P}(f))$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}{}' (f(\xi_j) - f(x_j))\Delta_j$$

$$\Rightarrow |S_{P,Q}(f) - S_P(f)| \leq \sum_{j=0}^{n-1}{}' \underbrace{|f(\xi_j) - f(x_j)|}_{\leq \varepsilon} \Delta_j$$

$$\leq \varepsilon \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1}{}' \Delta_j}_{= b-a} = \varepsilon(b-a) \quad (1)$$

si P se ha elegido de modo que $\Delta P \leq \delta$ y $\delta > 0$ tal que $x_1 \in [a,b]$ con

$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$ (tal elección de $\delta > 0$ puede hacerse por ser f uniformemente continua en $[a,b]$)

Usando (1), si Q, Q' son subconjuntos

$Q = \{\xi_j : j = 0 \ldots n-1\}$; $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$

$Q' = \{\xi_j' : j = 0 \ldots n-1\}$; $\xi_j' \in [x_j, x_{j+1}]$,

$$
\begin{aligned}
|S_{P,Q}(f) - S_{P,Q'}(f)| &= |(S_{P,Q}(f) - S_P(f)) + (S_P(f) - S_{P,Q'}(f))| \\
&\leq |S_{P,Q}(f) - S_P(f)| + |S_{P,Q'}(f) - S_P(f)| \\
&\leq 2\varepsilon(b-a) \qquad (2).
\end{aligned}
$$

Por (2), basta considerar sumas de Riemann del tipo $S_P(f)$, sin más que tomarlas suficientemente "finas" (con ΔP suficientemente pequeño, dado un error $\varepsilon > 0$)

ii) Sea ahora $\varepsilon > 0$ fijo y $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a,b]$ con $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Consideremos P, P' dos particiones de $[a,b]$ con $\Delta P, \Delta P' \leq \delta$ y queremos ver que $S_P(f) - S_{P'}(f)$ es pequeña:

Lema: Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ como antes y P una partición de $[a,b]$ con $\Delta P \leq \delta$. Si P' es otra partición de $[a,b]$ con $P \subset P'$, entonces

$$|S_P(f) - S_{P'}(f)| \leq \varepsilon(b-a) \qquad (3)$$

Dem (Lema) Sean $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ y $P' = \{a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b\}$. Como $P \subset P'$, tenemos:

- $x_0 = y_0$
- $x_1 = y_{k_1}$, $0 < k_1 < m$
- $x_2 = y_{k_2}$, $0 < k_1 < k_2 < m$
- $\vdots$
- $x_n = \underset{\underset{b}{\parallel}}{y_{k_n}}$, $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n = m$

$$S_{P'}(f) = \sum_{j=0}^{m-1} f(y_j)(y_{j+1} - y_j)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{k_1-1} f(y_j)(y_{j+1} - y_j)\right) + \left(\sum_{j=k_1}^{k_2-1} f(y_j)(y_{j+1} - y_j)\right)$$

$$+ \ldots + \left(\sum_{j=k_{n-1}}^{k_n-1} f(y_j)(y_{j+1} - y_j)\right) \qquad (*)$$

Observamos que $\sum_{j=0}^{k_1-1}{}' (y_{j+1}-y_j) = x_1 - x_0$

$$\sum_{j=k_1}^{k_2-1}{}' (y_{j+1}-y_j) = x_2 - x_1 \qquad (*)'$$

$$\sum_{j=k_{n-1}}^{k_n-1}{}' (y_{j+1}-y_j) = x_n - x_{n-1}$$

Usando $(*)$ y $(*)'$,

$$S_{P'}(f) - S_P(f) = \left(\sum_{j=0}^{k_1-1}{}' f(y_j)(y_{j+1}-y_j) - f(x_0)(x_1-x_0)\right)$$

$$+ \left(\sum_{j=k_1}^{k_2-1}{}' f(y_j)(y_{j+1}-y_j) - f(x_1)(x_2-x_1)\right)$$

$$\vdots$$

$$+ \left(\sum_{j=k_{n-1}}^{k_n-1}{}' f(y_j)(y_{j+1}-y_j) - f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})\right)$$

$$(**)$$

- Asimismo, $\left|\sum_{j=0}^{k_1-1}{}' f(y_j)(y_{j+1}-y_j) - f(x_0)(x_1-x_0)\right| =$

$$= \left|\sum_{j=0}^{k_1-1}{}' [f(y_j) - f(x_0)](y_{j+1}-y_j)\right| \quad (\text{por } (*)')$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k_1-1}{}' \underbrace{|f(y_j)-f(x_0)|}_{\leq \varepsilon, \text{ pues } |y_j - x_0| \leq |x_1-x_0| \leq \Delta P \leq \delta} (y_{j+1}-y_j) \leq \varepsilon \sum_{j=0}^{k_1-1}{}' (y_{j+1}-y_j) = \varepsilon(x_1-x_0) \quad (\text{por } (*)')$$

a)

Estimando de forma análoga los otros términos en $(**)$,

$$|S_{P'}(f) - S_P(f)| \le \varepsilon(x_1 - x_0) + \varepsilon(x_2 - x_1) + \dots + \varepsilon(x_n - x_{n-1})$$
$$= \varepsilon(b-a)$$

Usando el Lema, si P, P' son dos particiones de $[a,b]$ con $\Delta P, \Delta P' \le \delta$ entonces $P'' = P \cup P'$ cumple $P, P' \subset P''$, ~~usando~~ luego

$$|S_P(f) - S_{P'}(f)| = |(S_P(f) - S_{P''}(f)) + (S_{P''}(f) - S_{P'}(f))|$$
$$\le |S_P(f) - S_{P''}(f)| + |S_{P'}(f) - S_{P''}(f)|$$
$$\le 2\varepsilon(b-a) \qquad (4).$$

Para concluir la prueba de la Prop 1, de (4) se sigue que si P_n es una sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\Delta P_n \mapsto 0$, entonces $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por $a_n = S_{P_n}(f)$, a_n es una sucesión de Cauchy, y de (3) que si P_n' es cualquier otra sucesión de particiones de $[a,b]$ con $\Delta P_n' \to 0$, y $a_n' = S_{P_n'}(f)$, el límite de a_n y el de a_n' coinciden. Asimismo, si consideramos sumas de Riemann $S_{P_n,Q_n}(f)$ (con Q_n puntos elegidos compatiblemente con P_n) y $\Delta P_n \to 0$, también $\lim_{n\to\infty} S_{P_n,Q_n}(f) = \lim_{n\to\infty} S_{P_n}(f)$. De todo esto deducimos no sólo que $I = \int_a^b f(x)dx$ se puede calcular con precisión arbitraria con sumas de Riemann $S_{P_n,Q_n}(f)$, sino que podemos controlar a priori cómo de buenas ~~son~~ son esas aproximaciones a $I = \int_a^b f(x)dx$, dado un $\varepsilon > 0$ (error admisible) si conocemos $\delta > 0$ (el apropiado para ese ε ~~para~~ f en $[a,b]$) $\boxed{\cancel{E}}$

- Veamos que la integral $I = \int_a^b f(x)dx$, con $f: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua cumple los criterios i), ii), iii)

Prop 2 Sea $f: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continua y $I = \int_a^b f(x)dx$. Entonces se cumple (con I dadas por Def 1 y Prop 2)

i) Si $f(x) = cte$ en $[a,b]$, $I = \int_a^b f(x)dx = cte.(b-a)$.

ii) Si $f \geq 0$ en $[a,b]$, $I = \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

iii) Si $f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ son funciones continuas,

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

iv) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante, $\int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

v) Si $f, g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ son funciones continuas con $f \leq g$ en $[a,b]$, $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

vi) Si $c \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$.

vii) Si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$, F es diferenciable en $[a,b]$ * con $F'(x) = f(x)$

(A vii) se le conoce habitualmente como "Teorema Fundamental del Cálculo")

---

*: Si $x = a$, entendemos $F'(a)$ como derivada por la derecha,
y si $x = b$, ——— $F'(b)$ ——— por la izquierda

Dem:

i) Si P es una partición de $[a,b]$ con $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ y $f(x)=c$ $\forall x\in[a,b]$,

$$S_P(f)=\sum_{j=0}^{n-1}{}' f(\alpha_j)\Delta_j=\sum_{j=0}^{n-1}{}' c\,\Delta_j$$

$$=c\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1}{}'\Delta_j}_{=b-a}=c(b-a).\quad (1)$$

Como (1) vale para cualquier partición P,

$$\text{J-}\lim_{\Delta P\to 0} S_P(f)=c(b-a).$$

ii) Si $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ es una partición de $[a,b]$ con $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$,

$$S_P(f)=\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1}{}'\underbrace{f(\alpha_j)}_{\geq 0}\underbrace{\Delta_j}_{>0}}_{\geq 0}\geq 0.\quad (2).$$

Como (2) vale para cualquier partición P,

$$I=\lim_{\Delta P\to 0} S_P(f)\geq 0.$$

iii) Si $f,g:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ son continuas en $[a,b]$, también lo será su suma, luego $\exists\int_a^b (f+g)(x)\,dx$

con $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \lim_{\Delta P \to 0} S_P(f+g)$.

Pero si $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$,

$$S_P(f+g) = \sum_{j=0}^{n-1}{}' (f+g)(x_j)\,\Delta_j$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}{}' \left[f(x_j)\,\Delta_j + g(x_j)\,\Delta_j \right]$$

$$= \left[\sum_{j=0}^{n-1}{}' f(x_j)\,\Delta_j \right] + \left[\sum_{j=0}^{n-1}{}' g(x_j)\,\Delta_j \right]$$

$$= S_P(f) + S_P(g) \qquad (3).$$

Como (3) se cumple para cualquier partición P,

$$\lim_{\Delta P \to 0} S_P(f+g) = \lim_{\Delta P \to 0} \left[S_P(f) + S_P(g) \right]$$

$$= \lim_{\Delta P \to 0} S_P(f) + \lim_{\Delta P \to 0} S_P(g)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

iv) Si $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ es una partición,

$$S_P(\alpha f) = \sum_{j=0}^{n-1}{}' (\alpha f)(x_j)\,\Delta_j = \sum_{j=0}^{n-1}{}' \alpha f(x_j)\,\Delta_j$$

$$= \alpha\, S_P(f) \qquad (4),$$

y como (4) se cumple para cualquier partición P,

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \lim_{\Delta P \to 0} S_P(\alpha f) = \lim_{\Delta P\to 0} (\alpha\, S_P(f))$$
$$= \alpha \lim_{\Delta P\to 0} S_P(f) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

v) Si $f \leq g$ en $[a,b]$, escribimos $g = f+h$, con $h = g-f \geq 0$ en $[a,b]$.

Usando iii), $$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \underbrace{\int_a^b h(x)\,dx}_{\geq 0 \text{ (por ii)}}$$
$$\geq \int_a^b f(x)\,dx.$$

vi) Como f es continua en $[a,b]$, si $a \leq c \leq b$, también es continua en $[a,c]$ y en $[c,b]$, luego $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ existen ambas.

Sea ahora $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$ y supongamos $x_{m-1} \leq c < x_m$.

Entonces $$S_P(f) = \underbrace{\sum_{j=0}^{m-2} f(x_j)\,\Delta_j}_{I_P(f)} + \underbrace{f(x_{m-1})\,\Delta_{m-1}}_{II_P(f)} + \underbrace{\sum_{j=m}^{n-1} f(x_j)\,\Delta_j}_{III_P(f)}$$

Si P_n es una manera de particiones de $[a,b]$ con $\Delta P_n \mapsto 0$, $S_{P_n}(f) \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$,

y $S_{P_n}(f) = I_{P_n}(f) + II_{P_n}(f) + III_{P_n}(f)$.

Entonces
- $I_{P_n}(f) \mapsto \int_a^c f(x)dx$
- $|II_{P_n}(f)| \leq \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \Delta P \longmapsto 0$
- $III_{P_n}(f) \longmapsto \int_c^d f(x)dx$.

$\Rightarrow S_{P_n}(f) \longrightarrow \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$.

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$.

vii) Sea $a < x < b$ y $h > 0$ con $x+h \leq b$.

Entonces $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt$$

(por vi))

$$= F(x) + \int_x^{x+h} f(t)dt$$

15)

(S. 1)

$$\Rightarrow \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \quad (a<x<x+h\leq b).$$

Del mismo modo, si $h<0$ con $a\leq x+h<x<b$,

$$F(x) = F(x+h) + \int_{x+h}^{x} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = -\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt \quad (a\leq x+h<x<b)$$

(S. 2).

$$S.1) \Rightarrow \lim_{h\to 0+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0+}\left[\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right] \quad (S.1)'$$

$$S.2) \Rightarrow \lim_{h\to 0-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0-}\left[\frac{-1}{h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt\right] \quad (S.2)'$$

Veamos que los límites en $S.1)'$ y $S.2)'$ son ambos $f(x)$:

-. Sea $\varepsilon>0$ y $\delta>0$ tal que $x,y\in[a,b]$ con $|x-y|\leq\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$. Tomando en $S.1)$ $0<h\leq\delta$, $f(x)-\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt =$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}(f(x)-f(t))\,dt$$

Pero para $t\in[x,x+h]$, $-\varepsilon\leq f(x)-f(t)\leq\varepsilon$

Usando Prop 7.V), se sigue que

$$-\varepsilon h \leq \int_x^{x+h} (f(x)-f(t))\,dt \leq \varepsilon h$$

$$\Rightarrow -\varepsilon \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(x)-f(t))\,dt \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| f(x) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \right| \leq \varepsilon \text{ si } 0<h\leq\delta$$

(con $h>0$ tal que $x+h\leq b$)

$$\Rightarrow \exists \lim_{h\to 0+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

• Si en 5.7) tomamos $-\delta\leq h<0$ (con $a\leq x+h<x$)

$$f(x) - \left(-\frac{1}{h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt\right) = \frac{-1}{h}\int_{x+h}^{x} (f(x)-f(t))\,dt,$$

y razonando como antes, $\left|\frac{-1}{h}\int_{x+h}^{x} (f(x)-f(t))\,dt\right| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \exists \lim_{h\to 0-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

• Veamos $\lim_{h\to 0+} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} = f(a)$:

Primero, $F(a)=0$, y entonces si $h>0$ a tal que $a+h\leq b$ y $h\leq\delta$ (para el $\varepsilon>0$ de antes),

$\cancel{\frac{F(a+h)-F(a)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} (f(x)-f(a))\,dt}$ * 17)

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}-f(a)=\frac{F(a+h)}{h}-f(a)$$
$$=\frac{1}{h}\int_a^{a+h}(f(t)-f(a))\,dt$$

y razonando como antes, $\left|\frac{F(a+h)-F(a)}{h}-f(a)\right|\leq\varepsilon$,

luego $\exists \lim_{h\to 0+}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=f(a)$.

(La prueba de que $\lim_{h\to 0-}\frac{F(b+h)-F(b)}{h}=f(b)$ es similar y la omito).

Def 3: Sea $f:[a,b]\longmapsto\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Entonces, decimos que F es una primitiva de f en $[a,b]$ si $F'=f$ en $[a,b]$.

Prop 3: Sea $f:[a,b]\longmapsto\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Entonces:

i) f admite una primitiva en $[a,b]$.

ii) Si F,G son dos primitivas de f en $[a,b]$, $F-G=cte$.

iii) $I=\int_a^b f(x)\,dx$ es $F(x)\Big|_{x=a}^{b}:=F(b)-F(a)$.

<u>Dem:</u>

i) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de f según el TFC (Teorema Fundamental del Cálculo, Prop. 2 vii))

ii) Si F, G son dos primitivas de f en $[a,b]$, puesto que son derivables, son asimismo continuas. Puesto que $F'(x) = G'(x) = f(x)$ en (a,b), según el Teorema de Rolle, $F - G =$ cte en $[a,b]$ (pues $F-G$ es continua en $[a,b]$ con $(F-G)' = 0$ en (a,b)).

iii) Con $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, claramente $F(a) = 0$ y $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$, luego $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Por ii), si G es cualquier otra primitiva de F,

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= (F(b) + c) - (F(a) + c) \\ &= F(b) - 0 \\ &= \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

$\boxtimes$

Estudiaremos a continuación diversos teoremas sobre integración:

Prop 4: Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones derivables en cierto intervalo I. Entonces:

i) $$\int f(x)\, g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x) g(x)\,dx$$

ii) Si $[a,b] \subset I$,
$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b f'(x) g(x)\,dx$$

(tanto i) como ii) se conocen como Fórmula de Integración por partes)

Dem: Puesto que $f \cdot g$ es derivable en I con $(f\cdot g)' = f'g + fg'$ tenemos

$$\int (f\cdot g)'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

(pues $f(x)g(x)$ es primitiva de $(f\cdot g)'(x)$)

y $\int (f\cdot g)'(x)\,dx = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\,dx$, de donde se deduce inmediatamente i). Entonces ii) es consecuencia inmediata de i) y la Prop. 3.

Nota: i) suele escribirse $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, tomando $\left|\begin{array}{l} u = f(x) \\ dv = g'(x)\,dx \end{array}\right.$

Ejemplo:

i) $\int \underbrace{\log x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = x\log x - \int x \cdot \frac{dx}{x}$

$du = \frac{dx}{x},\ v = x$

$= x\log x - \int dx$

$= x\log x - x + C.$

ii) $\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^x dx}_{dv} = xe^x - \int e^x dx$

$du = dx$

$v = e^x$

$= xe^x - e^x + C.$

iii) $I = \int \underbrace{e^x}_{u}\, \underbrace{\operatorname{sen} x\, dx}_{dv} = -e^x \cos x - \int (-\cos x)\, e^x dx$

$du = e^x dx$

$v = -\cos x$

$= -e^x\cos x + \int \underbrace{e^x}_{u}\, \underbrace{\cos x\, dx}_{dv}$

$u = e^x,\ du = e^x dx$

$v = \operatorname{sen} x$

$= -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \underbrace{\int \operatorname{sen} x\, e^x dx}_{I}$

$\Rightarrow 2I = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$

Prop 5 (Fórmulas de cambio de variable)

i) Sea $h(x)$ tal que existen funciones diferenciables f, g (en cierto intervalo I) con $h(x) = f'(g(x))\, g'(x)$.

Entonces $\int h(x)\, dx = f(g(x)) + C = (f \circ g)(x) + C.$

ii) Sea $g:[a,b]\longmapsto I$ diferenciable con g' continua en $[a,b]$ y $f: I\longmapsto \mathbb{R}$ continua en I,

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du & \text{si } g(a)\leq g(b) \\ \displaystyle -\int_{g(b)}^{g(a)} f(u)\,du & \text{si } g(a)\geq g(b) \end{cases}$$

Dem:

i) Consecuencia inmediata de la Regla de la Cadena, pues $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x) = h(x)$.

ii) Supongamos $g(a)\leq g(b)$ y sea $F=\int f(x)\,dx$ (luego $F'=f$ en I).

Entonces $f(g(x))g'(x) = (F\circ g)'(x)$, $x\in[a,b]$

luego $F\circ g$ es una primitiva de $f(g(x))\,g'(x)$ en $[a,b]$.

Por el TFC, (e i)) $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = (F\circ g)(x)\Big|_{x=a}^{b}$

$$= F(g(b)) - F(g(a)).\ (1).$$

- Si $g(a)\leq g(b)$, $F(g(b))-F(g(a)) = \displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$.
- Si $g(a)\geq g(b)$, $F(g(b))-F(g(a)) = -(F(g(a))-F(g(b))) = -\displaystyle\int_{g(b)}^{g(a)} f(u)\,du$.

Observaciones

1) Si entendemos $\int_c^d f(x)\,dx := \begin{cases} \int_c^d f(x)dx, & c \leq d \\ -\int_d^c f(x)dx, & c \geq d \end{cases}$

entonces la fórmula ii) puede escribirse como

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$ sin

necesidad de distinguir si $g(a) \leq g(b)$ ó $g(a) \geq g(b)$

2) Tomando $du = g'(x)dx$, es habitual

escribir i) como $\int f'(g(x))\,g'(x)dx = \int f'(u)\,du = f(u)+C$

$$= f(g(x)) + C$$

(pues $u = g(x)$).

Ejemplos:

i) $J = \int \frac{x}{1+x^4}\,dx$. Tomando $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$ (ó bien, $dg = 2x\,dx$)

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2}\int \frac{dg}{1+g^2} = \frac{1}{2}\arctan g + C$$
$$= \frac{1}{2}\arctan(x^2) + C.$$

ii) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. Tomando $x = \operatorname{sen} u$, $dx = \cos u\,du$

$x = 0 \to u = 0$
$x = 1 \to u = \frac{\pi}{2}$

y entonces $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}\,\cos u\,du$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,du.$$

Si hubiéramos hecho $x = \cos u$, habríamos obtenido

$\left| \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow u = \pi/2 \\ x=1 \Rightarrow u = 0 \end{array} \right.$, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2 u}\,(-\operatorname{sen} u)\,du$

$$= \int_{\pi/2}^0 (-\operatorname{sen}^2 u)\,du$$

$$= +\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 u\,du$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u)}_{=1}\,du = \pi/2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Integración de funciones racionales.

Def 5) Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, con $p(x)$, $q(x)$ polinomios y $q(x) \neq 0$, f se denomina una función racional.

– Hechos sobre polinomios que son fundamental conocer

1) Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con ~~$q(x)$~~ $gr(q) \geq 1$, existen polinomios únicos $d(x)$ y $r(x)$ tales que

1.1) $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$.

1.2) $gr(r) < gr(q)$

(Recordemos que si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, decir $gr(p) = n \Leftrightarrow a_n \neq 0$)

2) Si los coeficientes de $p(x)$ son complejos y consideramos $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, $z \in \mathbb{C}$, p tiene al menos una raíz compleja: $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ con $p(z_0) = 0$.

3) Si $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ es un polinomio real, y consideramos $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ con $z \in \mathbb{C}$, si $z_0 \in \mathbb{C}$ cumple $p(z_0) = 0$, entonces $p(\bar{z}_0) = 0$

Si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z_0) \neq 0$, entonces para $x \in \mathbb{R}$, $(x - z_0)(x - \bar{z}_0) = q(x)$ es un polinomio de grado 2 real sin raíces reales

(ejemplo: si $z_0 = i$, $(x-i)(x+i) = x^2+1$)

(otro ejemplo: $z_0 = 1+i$, $(x-1-i)(x-1+i) = (x-1)^2+1$
$= x^2 - 2x + 2$)

Entonces $p(x)$ admite la siguiente factorización única.

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{r_1} \dots (x - x_R)^{r_R} q_1(x)^{r_{R+1}} \dots q_l(x)^{r_{R+l}}$$

con $x_1, \dots, x_k$: raíces reales de $p(x)$,

y $q_1(x), \dots, q_l(x)$ polinomios reales de grado 2

sin raíces reales y $r_1, \dots, r_k, r_{k+1}, \dots, r_{k+l}$ enteros ≥ 1

con $n = r_1 + \dots + r_k + 2(r_{k+1} + \dots + r_{k+l})$.

Usando 1), 2), 3), si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función

racional, con $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$; $gr(r) < gr(p)$,

$$f(x) = d(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

y para integrar $f(x)$ usamos la denominada

expresión de $f(x)$ como combinación lineal de

fracciones simples:

$$\frac{r(x)}{(x-x_1)^{r_1} \cdots (x-x_k)^{r_k} q_1(x)^{r_{k+1}} \cdots q_l(x)^{r_{k+l}}} = \frac{A_1^1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{r_1}^1}{(x-x_1)^{r_1}}$$

$$+ \frac{A_1^2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_{r_k}^2}{(x-x_k)^{r_k}}$$

$$+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{q_1(x)} + \dots + \frac{B_{r_{k+1}}^1 x + C_{r_{k+1}}^1}{q_1(x)^{r_{k+1}}}$$

$$+ \frac{B_1^{r_{k+l}} + C_1^{r_{k+l}}}{q_l(x)} + \dots + \frac{B_{r_{k+l}}^{r_{k+l}} x + C_{r_{k+l}}^1}{q_l(x)^{r_{k+l}}}$$

Ejemplo: Calcular $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{x(x+1)(x^2+1)}\,dx$.

Escribimos $\displaystyle\frac{2x^2+x+1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$.

$$\Leftrightarrow 2x^2+x+1 = A(x+1)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x(x+1) \quad \forall x. \quad (*)$$

Para calcular los coeficientes en $(*)$ hay dos métodos (complementarios).

i) Desarrollar el miembro derecho de $(*)$ e igualando potencias de x, obtenemos un sistema lineal de 4 ecuaciones con 4 incógnitas para $A,\dots,D$.

ii) Tomando en $(*)$ valores particulares de x, obtener relaciones simples para los coeficientes.

Por ejemplo, siguiendo (ii):

- Si $x=0 \Rightarrow 1 = A$
- Si $x=-1 \Rightarrow 2 = -2B$

$\longrightarrow$ sólo quedan por determinar C, D.

- Si $x=1 \Rightarrow 4 = \underbrace{4A+2B}_{=2} + 2(C+D)$; $C+D = 1$
- Si $x=2 \Rightarrow 11 = \underbrace{15A+10B}_{=5} + 6(2C+D)$; $2C+D = 1$

$\hookrightarrow C=0,\ D=1$

luego $\dfrac{2x^2+x+1}{x(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2+1}$

$$\Rightarrow \int \frac{2x^2+x+1}{x(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \log|x| - \log|x+1| + \arctan x + C$$

$$= \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + \arctan x + C.$$

Aplicaciones de la integral:

Prop 6: (Fórmula integral del resto de Taylor)
Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ con k derivada continua ($k \geq 1$) en $[a,b]$. Entonces, si $a \leq x \leq b$,

$$f(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j}_{P_a^{k-1}(f)(x)} + \underbrace{\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}\,dt}_{r_k(f)(x)}$$

$(*)_k$

Obs 1: Si f tiene k derivadas continuas en $[c,d]$ y $c \leq x \leq a \leq d$, también podemos escribir:

$$f(x) = P_a^{k-1}(f)(x) + \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}\,dt,$$

interpretando $\int_a^x$ como $-\int_x^a$.

<u>Obs 2</u>: $r_k(f)(x)$ dado por la Prop 6 se conoce como la <u>fórmula integral del resto</u> de Taylor.

<u>Dem</u>: – Veamos el caso base $k=1$: si $a \leq x \leq b$,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$ (por el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC))

$$\Leftrightarrow f(x) = \underbrace{f(a)}_{P_a^0(f)(x)} + \underbrace{\int_a^x f'(t)dt}_{r_1(f)(x)} \quad (a \leq x \leq b) \checkmark \qquad (1)$$

– <u>$k=2$</u>: La fórmula $(*)_2$ para f dice

$$f(x) = P_a^1(f)(x) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt \qquad (2)$$

con $P_a^1(f)(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ (y $a \leq x \leq b$).

(tal fórmula tiene sentido, pues f'' es continua en $[a,b]$, luego la integral $\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$, $a \leq x \leq b$ está bien definida).

Veamos que (2) coincide con (1): integramos por partes

$$\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt = \int_a^x \underbrace{(x-t)}_{u} \underbrace{f''(t)dt}_{dv} = (x-t)f'(t)\Big|_{t=a}^{x} - \int_a^x f'(t)(-dt)$$

$du = -dt$, $v = f'(t)$

$= \cancel{a} -(x-a) f'(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \quad (3).$

(1) y $(3) \Rightarrow \quad P_a^1(f)(x) + \int_a^x f''(t)(\cancel{x}-t)\,dt$

$$= [f(a) + f'(a)(x-a)] + [-f'(a)(x-a) + \int_a^x f'(t)\,dt]$$

$$= f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

$$= f(x) \quad (\text{por el caso } k=1).$$

→ Veamos ahora en general que $(*)_k \Rightarrow (*)_{k+1}$:

$(*)_{k+1}$ afirma que si f tiene $k+1$ derivadas continuas en $[a,b]$ y $a \le x \le b$,

$$f(x) = P_a^k(f)(x) + \underbrace{\frac{1}{k!}\int_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\,dt}_{r_{k+1}(f)(x)}.$$

(tal fórmula tiene sentido por ser $f^{(k+1)}$ continua en $[a,b]$).

De nuevo, hacemos una integración por partes en $r_{k+1}(f)(x)$:

$$r_{k+1}(f)(x) = \frac{1}{k!}\int_a^x \underbrace{(x-t)^k}_{u}\ \underbrace{f^{(k+1)}(t)\,dt}_{dv}. \quad \left| \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = -k(x-t)^{k-1} \\ v = f^{(k)}(t) \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{k!}\left\{ (x-t)^k f^{(k)}(t)\Big|_{t=a}^{x} - \int_a^x f^{(k)}(t)\,(-k(x-t)^{k-1}\,dt) \right\}$$

$$= -\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{k}{k!}\int_a^x f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}\,dt$$

$$= -\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_{\cancel{k}}(f)(x) \qquad (2a)$$

de dónde $P_a^k(f)(x) + r_{k+1}(f)(x) =$

$$= \left[\sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j\right] + \left[-\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_k(f)(x)\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + r_k(f)(x)$$

$$= P_a^{k-1}(f)(x) + r_k(f)(x),$$

luego la fórmula $(*)_{k+1}$ coincide con la $(*)_k$, la cual a su vez (hipótesis de inducción), coincide con f.

Ejemplos:

1) Veamos que si ~~...~~ $-1<x\leq 1$, $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$:

(obs: esta fórmula ya la hemos probado si $0\leq x\leq 1$, que es una hipótesis más restrictiva).

— Si $f(x) = \log(1+x)$, $x\in(-1,1)$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}{(1+x)^{n+1}}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n+1}}$$

Con ello, $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n=1,2 \ldots)$; $f(0)=0$.

$$y \quad r_n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^{n+1}}(x-t)^{n-1}\,dt$$

$$= (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n+1}}\,dt.$$

- Si $0 \le x \le 1$, ya sabemos que $r_n(f)(x) \longmapsto 0$,

así que supondré $-1 < x \le 0$:

$$r_n(f)(x) = (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n+1}}\,dt = (-1)^{n-1}(-1)\int_x^0 \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

$$\Rightarrow |r_n(f)(x)| = \left|\int_x^0 \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^{n+1}}\,dt\right| = \int_x^0 \frac{(t+|x|)^{n-1}}{(1+t)^{n+1}}\,dt.$$

$$= \int_x^0 \left(\frac{|x|+t}{1+t}\right)^{n-1}\frac{1}{(1+t)^2}\,dt.$$

- Si $x \le t \le 0$, $0 \le \frac{|x|+t}{1+t} \le \frac{|x|+|x|t}{1+t} = |x| \Rightarrow 0 \le \left(\frac{|x|+t}{1+t}\right)^{n-1} \le |x|$

y además $1+t \ge 1+x = 1-|x| \Rightarrow 0 \le \frac{1}{(1+t)^2} \le (1-|x|)^{-2}$.

$$\text{Por tanto, } |r_n(f)(x)| = \int_x^0 \underbrace{\left(\frac{|x|+t}{1+t}\right)^{n-1}}_{\le |x|^{n-1}}\underbrace{\frac{1}{(1+t)^2}}_{\le (1-|x|)^{-2}}\,dt \le$$

$$\le \int_x^0 |x|^{n-1}(1-|x|)^{-2}\,dt = \frac{|x|^n}{(1-|x|)^2} \longmapsto 0 \text{ (pues } 0 \le |x| < 1)$$

31)

2) Consideremos $f(x) = (1+x)^a$ con $0 < a < 1$ y $|x| < 1$.

Entonces $f^{(n)}(x) = \underbrace{a(a-1) \cdots (a-n+1)}_{= c_n} (1+x)^{a-n}$

y $|c_n| \leq a \underbrace{(1-a)}_{\leq 1} \cdots \underbrace{(n-1-a)}_{\leq n-1} \leq a(n-1)!$

$$\Rightarrow |r_n(f)(x)| = \left| \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x c_n (1+t)^{a-n} (x-t)^{n-1} dt \right|$$

$$\leq a \left| \int_0^x [(1+t)(x-t)]^{n-1} (1+t)^{a-1} dt \right|$$

Razonando como en el caso de $f(x) = \log(1+x)$,

$|(1+t)(x-t)^{n-1}| \leq |x|^{n-1}$ con t entre 0 y x,

y entonces $|r_n(f)(x)| \leq a|x|^{n-1} \left| \int_0^x (1+t)^{a-1} dt \right|$

$$\leq a|x|^{n-1} (1-|x|)^{a-1} |x| \to 0$$

3) Sea $f(x) = \arctan x$.

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. En lugar de hallar f'', $f^{(3)} \ldots f^{(n)}$ (muy complicadas), usamos que

$\forall t \neq 1$, $\sum_{j=0}^{n} t^j = \frac{t^{n+1}-1}{t-1}$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n}{}'(-t)^j = \frac{(-t)^{n+1}-1}{-t-1} = \frac{1+(-t)^n}{1+t}$$

Tomando $t=x^2$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}{}'(-x^2)^j = \frac{1+(-x^2)^n}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{n}{}'(-1)^j x^{2j} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \arctan x = \int_0^x \left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \int_0^x \left[\sum_{j=0}^{n}{}'(-1)^j t^{2j} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2j}}{1+t^2}\right]dt$$

$$= \sum_{j=0}^{n}{}'\frac{(-1)^j}{2j+1}x^{2j+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2j}}{1+t^2}\,dt.$$

. Si $|x|\le 1$, $\displaystyle\left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2j}}{1+t^2}\,dt\right| = \int_0^{|x|}\frac{t^{2j}}{1+t^2}\,dt$

$$\le \int_0^{|x|} t^{2j}\,dt \quad \left(\text{pues } \frac{1}{1+t^2} \le 1\right)$$

$$= \frac{|x|^{2j+1}}{2j+1} \longmapsto 0.$$

y con ello obtenemos la serie:

$$\arctan x = \sum_{j=0}^{\infty}{}'\frac{(-1)^j}{2j+1}x^{2j+1}, \quad |x|\le 1.$$

$$\left(\text{p. ej. } \frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \cdots\right)$$

33)

Es un ejercicio simple que $\frac{\pi}{4}$ puede escribirse con:

- $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ $\quad (*)$
- $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$.

Usando la 2ª de las expresiones para $\frac{\pi}{4}$ de $(*)$ y la serie de Taylor de $\arctan x$, es fácil calcular $\frac{\pi}{4}$ con precisión arbitraria

. Integrales impropias de funciones continuas "a trozos"

A menudo se presenta el problema de considerar integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ donde o bien el intervalo (a,b) no es acotado y/o la función f presenta discontinuidades y/o no es acotada.

Def 6: Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ función con un número finito de discontinuidades en (a,b). Si $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ son estas discontinuidades, definimos: $\left(\text{tomamos } \begin{array}{|l} a = x_0 \\ b = x_{n+1} \end{array} \right)$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx$$

Ejemplo:

i) Si $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-1)dx + \int_0^1 (1)\, dx = 1\cdot t -$$

$$= (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1 = 0.$$

ii) $f(x) = [x]$

$F(x) = \int_0^x f(t)dt$ (para $x \geq 0$).

si $k \leq x < k+1$ con $k \in \mathbb{N}$,

$$F(x) = \underbrace{\int_0^1 0\, dt}_{=0} + \underbrace{\int_1^2 1\, dt}_{=1} + \cdots + \underbrace{\int_{k-1}^{k} (k-1)dt}_{k-1} + \int_k^x k\, dt$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (j-1) + k(x-k)$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} j + k(x-k) = \frac{k(k-1)}{2} + k(x-k)$$

$$= \frac{1}{2}[x]([x]-1) + [x]\{x\} \quad 35)$$

Def 7: Sea f función continua a trozos en (a,b) (intervalo abierto y no necesariamente acotado). Definimos.

i) Si $a, b \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{c \mapsto a+ \\ d \mapsto b-}} \int_c^d f(x)\,dx$

(y $\displaystyle\int_c^d f(x)\,dx$ como por la Def. 6).

ii) Si $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{c \to a+ \\ d \mapsto \infty}} \int_c^d f(x)\,dx$$

iii) Si $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{c \mapsto -\infty \\ d \mapsto b-}} \int_c^d f(x)\,dx.$$

iv) Si $a = -\infty$, $b = \infty$,

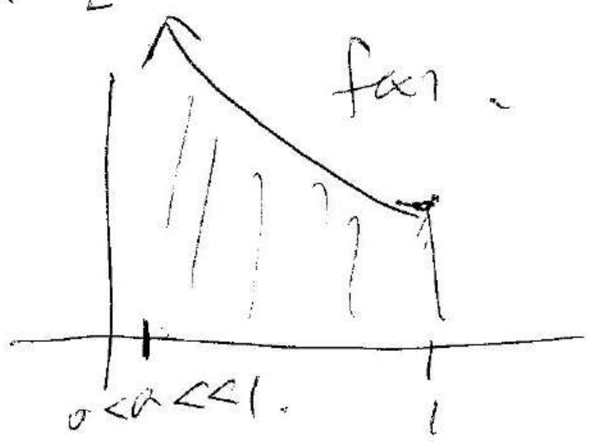
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{c \to -\infty \\ d \mapsto \infty}} \int_c^d f(x)\,dx.$$

Ejemplos:

i) $f(x) = x^{-1/2}$ en $(0,1)$: no está acotada si $x \to 0+$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \underbrace{x^{-1/2}\,dx}_{d(+2x^{1/2})} = \lim_{a \mapsto 0+} \left[+2x^{1/2} \Big|_{x=a}^{1} \right]$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left[2 - 2a^{1/2} \right] = 2$$



ii) $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ no está acotada si $\begin{cases} x \to 1^- \\ x \to (-1)^- \end{cases}$.

$$I = \lim_{\substack{a \to (-1)^+ \\ b \to 1^-}} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{a \to (-1)^+ \\ b \to 1^-}} \left[\arcsin x \Big|_{x=a}^{b} \right]$$

$$= \lim_{\substack{a \to (-1)^+ \\ b \to 1^-}} \left[\underbrace{\arcsin b}_{\downarrow \pi/2} - \underbrace{\arcsin a}_{\downarrow -\pi/2} \right] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

iii) $I = \int_1^{\infty} x^{-p}\, dx$, donde $p \geq 0$.

$f(x) = x^{-p}$ es continua y acotada en $[1, \infty)$ para cualquier exponente $p \geq 0$.

— Si $p = 0$, $I = \lim_{R \to \infty} \int_1^R 1\, dx = \lim_{R \to \infty} (R-1) = \infty$.

37).

- Si $0<p<1$, $I = \lim\limits_{R\to\infty} \int_1^R \underbrace{x^{-p}dx}_{d\left(\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right)} = \lim\limits_{R\to\infty}\left[\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{x=1}^{R}\right]$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{R^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] = \infty, \text{ pues } 1-p>0.$$

- Si $p=1$,

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \underbrace{\frac{dx}{x}}_{d(\log x)} = \lim_{R\to\infty}\left[\log x\Big|_{x=1}^{R}\right]$$

$$= \lim_{R\to\infty}\log R = \infty.$$

- Si $p>1$, $I = \lim\limits_{R\to\infty}\int_1^R \underbrace{x^{-p}dx}_{d\left(\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right)} =$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{R^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] = \frac{1}{p-1}, \text{ pues } 1-p<0$$

iv) Sea $a>0$ e $I = \int_0^\infty e^{-ax}dx$.

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \underbrace{e^{-ax}dx}_{d\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)} = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_{x=0}^{R}\right]$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a}e^{-aR}\right] = \frac{1}{a}, \text{ pues } a>0.$$

• Sabemos que $I=\int_a^b f(x)\,dx$ es un límite de ~~Sn~~ sumas de Riemann

(por ejemplo, $I=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} f\left(a+\frac{j}{n}(b-a)\right)\frac{b-a}{n}$)

• A menudo se presenta el problema de calcular (exacta o aproximadamente), sumas del tipo $S_n=\sum_{j=1}^{n} f(j)$, dónde f es una función "con variación suave". La idea es que, en algún sentido, $S_n\simeq\int_0^n f(x)\,dx$, y a menudo es mucho más sencillo calcular/estimar $\int_0^n f(x)\,dx$.

<u>Prop 7</u>: Sea f una función con derivada continua en $[0,n]$ $(n\in\mathbb{N})$, si $S_n=\sum_{j=1}^{n} f(j)$, tenemos

$$S_n=\int_0^n f(x)\,dx+\int_0^n f'(s)\{s\}\,ds,$$

dónde $\{s\}$ ~~es~~ la función "mdo": $\{s\}=s-[s]$.

<u>Dem</u>: $\int_0^n f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n}\int_{j-1}^{j} f(x)\,dx$, luego

$$S_n-\int_0^n f(x)\,dx=\sum_{j=1}^{n}\left[f(j)-\int_{j-1}^{j} f(x)\,dx\right] \quad (1)$$

Asimismo, $\displaystyle\int_{j-1}^{j} f(x)\,dx = \int_{j-1}^{j} u\,dv \;\Big|\; \begin{array}{l} u = f(x) \\ v = x-j+1 \end{array}$

$$= \underbrace{uv}_{f(x)(x-j+1)}\Big|_{x=j-1}^{j} - \int_{j-1}^{j} (x-j+1)\, f'(x)\,dx$$

$$= f(j) - \int_{j-1}^{j} (x-j+1)\, f'(x)\,dx$$

$$= f(j) - \int_{j-1}^{j} \{x\}\, f'(x)\,dx, \quad \{x\} = x-j+1 \text{ si } j-1 \le x < j \qquad (2)$$

(1) y (2) $\Rightarrow$ $\displaystyle S_n - \int_0^n f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n}{}' \int_{j-1}^{j} \{x\}\, f'(x)\,dx = \int_0^n f'(x)\{x\}\,dx$ $\blacksquare$

Ejemplo:

i) $\displaystyle S_n = \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{1}{j}$: $\displaystyle S_n = 1 + \sum_{j=2}^{n}{}' \frac{1}{j}$, y usando la Prop 7, $\displaystyle \sum_{j=2}^{n}{}' \frac{1}{j} = \int_1^n \frac{dx}{x} - \int_1^n \frac{\{x\}}{x^2}\,dx$,

luego $\displaystyle S_n = 1 + \log n - \int_1^n \frac{\{x\}}{x^2}\,dx$.

Observamos que si $x \ge 1$, $\displaystyle 0 \le \frac{\{x\}}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$,

y como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$, se sigue que $\displaystyle \exists \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\{x\}}{x^2}\,dx$

y que $\displaystyle S_n - \log n = 1 - \int_1^n \frac{\{x\}}{x^2}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2}\,dx$, (10) o en otros términos, $S_n = \log n + \gamma + o(1)$, $n\to\infty$, siendo $\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2}\,dx$ la denominada constante de Euler–Mascheroni ($\gamma = 0.577\ldots$)

Este resultado implica en particular que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, pues las sumas parciales de esta serie son $\simeq \log n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. $\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right) = 1\right)$

ii) $S_n = \sum_{j=1}^{n} \log j$: $S_n = \sum_{j=2}^{n} \log j$, y usando la Prop 7.2. $S_n = \int_1^n \log x\,dx + \int_1^n \frac{\{x\}}{x}\,dx$

- $\int_1^n \log x\,dx = x\log x - x\Big|_{x=1}^{n} = n\log n - n + 1$
- $\int_1^n \frac{\{x\}}{x}\,dx = \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{\{x\}}{x}\,dx$.

$$\int_j^{j+1} \frac{\{x\}}{x}\,dx = \int_j^{j+1} \{x\}\left[\frac{1}{j} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{j}\right)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{j}\underbrace{\int_j^{j+1} \{x\}\,dx}_{=1/2} - \int_j^{j+1} \{x\}\,\frac{x-j}{xj}\,dx$$

$$= \frac{1}{2j} - \int_j^{j+1} \frac{\{x\}^2}{x[x]}\,dx \qquad (41)$$

$$\Longrightarrow \int_1^n \frac{\{x\}}{x}\,dx = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} - \int_1^n \frac{\{x\}}{x[x]}\,dx$$

Por tanto: $$S_n = n\log n - n + 1 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} - \int_1^n \frac{\{x\}}{x[x]}\,dx$$

y puesto que según el ejemplo anterior,

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} = \log(n-1) + A_n, \quad \text{con } A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$$

$$= \log n + \log\frac{n-1}{n} + A_n$$

$$= \log n + \underbrace{\log\left(1-\frac{1}{n}\right) + A_n}_{= A_n' \xrightarrow[n\to\infty]{} A},$$

podemos escribir

$$S_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + C_n, \qquad (*)$$

$$\text{con } C_n = 1 + \frac{1}{2}A_n' - \int_1^n \frac{\{x\}}{x[x]}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} C = 1 + A - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x[x]}\,dx$$

(C es una constante finita porque $0 < \frac{\{x\}}{x[x]} \leq \frac{1}{x^2}$ $(x \geq 1)$ y $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$, que hace que $0 < \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x[x]}\,dx \leq 1$)

De $(*)$ se sigue la importante Fórmula de Stirling:

<u>Prop δ</u>: Existe el límite $\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = A$,

con $0 < A < \infty$.

Observaciones:

i) La Prop. 8 puede expresarse $n! \simeq A n^{n+1/2} e^{-n}, n \gg 1$

ii) Puede probarse que $A = \sqrt{2\pi}$

Dem (Prop 8): Según (*), $\log n! = \sum_{j=1}^{n} \log j$ puede escribirse como $\log n! = (n+\frac{1}{2})\log n - n + C_n$

$$= \log n^{n+\frac{1}{2}} - n + C_n$$

$$\Rightarrow n! = \exp(\log n^{n+\frac{1}{2}} - n + C_n)$$

$$= e^{C_n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

Si $n \to \infty$, $e^{C_n} \longmapsto e^{C}$; $C = \lim_{n\to\infty} C_n$,

y si $A = e^{C}$, $0 < A < \infty$ por lo visto anteriormente

y tenemos $\dfrac{n!}{n^{n+1/2} e^{-n}} = e^{C_n} \underset{n\to\infty}{\longmapsto} A$ ☒

Prop 9: Sea $f : [1,\infty)$ función que cumple:

i) f tiene derivada $f' \leq 0$ en $[1,\infty)$

ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

iii) $f(1) > 0$

Entonces, si consideramos $S = \sum_{n=1}^{\infty}{}' f(n)$ e $I = \int_1^{\infty} f(x)\,dx$,

$S, I \geq 0$ y son ambas finitas o infinitas

simultáneamente

(A la Prop. 9 se la suele conocer como "Criterio de Convergencia de la Integral").

<u>Dem</u>: Por i), f es decreciente en $[1,\infty)$,

luego si $x \geq 1$, $f(1) \geq f(x) \geq \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Consideremos ahora $n \in \mathbb{N}$ y $S_n = \sum_{j=1}^{n}{}' f(j)$, $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$

e $I_n = \sum_{j=1}^{n-1}{}' \int_j^{j+1} f(x)\,dx$. (1)

Para $j \geq 1$ fijo, si $j \leq x \leq j+1$, $f(j) \geq f(x) \geq f(j+1)$

$\Rightarrow \int_j^{j+1} f(j)\,dx \geq \int_j^{j+1} f(x)\,dx \geq \int_j^{j+1} f(j+1)\,dx$

$\Rightarrow f(j) \geq \int_j^{j+1} f(x)\,dx \geq f(j+1)$ (2)

(1) y (2) $\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{n-1}{}' f(j) \geq I_n = \sum_{j=1}^{n-1}{}' \int_j^{j+1} f(x)\,dx \geq \sum_{j=1}^{n-1}{}' f(j+1)$

(3)

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1}{}' f(j)}_{S_n} \geqslant I_n \geqslant \underbrace{\sum_{j=2}^{n}{}' f(j)}_{S_{n+1}-f(1)}$$

$$\Rightarrow S_n \geqslant I_n \geqslant S_{n+1} - f(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \ (3)$$

Tomando en (3), $\lim_{n\to\infty}$, deducimos

$$S \geqslant I \geqslant S - f(1) \qquad (4),$$

luego S e I son finitas o infinitas simultáneamente (que $S, I \geqslant 0$ es obvio, por ser $f(x) \geqslant 0 \ \forall x \geqslant 1$).

Ejemplos:

(i) $\sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{1}{j}$ diverge :

Ya lo hemos visto, pues $\sum_{j=1}^{n}{}' \frac{1}{j} = \log n + O(1)_{n\to\infty}$,

pero aplicando la Prop. 9, $\sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{1}{j}$ converge si

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} < \infty$, y siendo $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \log R = \infty$.

(ii) $\sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{1}{j^p}$ converge si $p > 1$:

Prop 10: Sea $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ función continua en $[a,b]$: intervalo cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$

Dem: Sea, ~~para~~ $\varepsilon>0$ fijo, ~~A~~ A el conjunto

$A=\{c\in[a,b]: \exists\delta>0$ tal que $x,y\in[a,c]$ y $|x-y|\le\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|\le\varepsilon\}$.

- $A\neq\phi$, pues f continua en $x=a \Rightarrow a\in A$.
- A está acotado superiormente (por b).

Por tanto $\exists\alpha=\sup A$. Si vemos que $\alpha\in A$ y además $\alpha=b$, hemos terminado. (está claro que $a\le\alpha\le b$)

- $\alpha\in A$: Por definición de α, si $a\le c<\alpha$, $c\in A$.

Como f es continua en $x=\alpha$, $\exists\delta_1>0$ tal que si $|x-\alpha|\le\delta_1\Rightarrow|f(x)-f(\alpha)|\le\varepsilon/2$. Si α fuera a, ya lo tendríamos, y si no, $a<\alpha\le b$. Fijemos entonces $c\in(a,\alpha)$ con $\alpha-c<\delta_1$. Como $c\in A$, $\exists\delta_2>0$ tal que si $x,y\in[a,c]$ con $|x-y|\le\delta_2\Rightarrow|f(x)-f(y)|\le\varepsilon/2$

Tomemos $\delta_3=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$ y sean $x,y\in[a,\alpha]$ con $|x-y|\le\delta_3$. Entonces:

- Si $x,y\in[a,c]$, $|x-y|\le\delta_3\le\delta_2\Rightarrow|f(x)-f(y)|\le\varepsilon/2$ (1)

— Si $x, y \in [c, \alpha] \Rightarrow |x-\alpha|, |y-\alpha| \leq \alpha - c < \delta_1$

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)| = |(f(x)-f(\alpha)) + (f(y)-f(\alpha))|$$

$$\leq \underbrace{|f(x)-f(\alpha)|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{|f(y)-f(\alpha)|}_{\leq \varepsilon/2}$$

(2)

$$\leq \varepsilon.$$

— Si $x \in [a, c]$ e $y \in [c, \alpha]$ con $|x-y| \leq \delta_3$,

$$|f(x)-f(y)| = |(f(x)-f(c)) + (f(c)-f(y))|$$

$$\leq \underbrace{|f(x)-f(c)|}_{\substack{\leq \varepsilon/2 \\ (\text{por } (1))}} + \underbrace{|f(c)-f(y)|}_{\substack{\leq \varepsilon/2 \\ (\text{por } (2))}}$$

$$\leq \varepsilon.$$

de donde $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$ si $x, y \in [a, \alpha]$ con $|x-y| \leq \delta_3$, luego $\alpha \in A$.

— Para ver que $\alpha = b$, basta ver que si $a \leq c < b$, con $c \in A$, $\alpha > c$ (pues sabemos que $\alpha \leq b$).

Como $\left| \begin{array}{l} \exists \delta_1 > 0 \text{ tal que } x, y \in [a, c] \text{ con } |x-y| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists \delta_2 > 0 \text{ tal que } x \in [a, b] \text{ con } |x-c| \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$

y $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y $c' = \min\{c + \delta_3, b\}$, $c < c' \leq b$

y razonando como en la prueba de que $\alpha \in A$, si $x, y \in [a, c']$ con $|x-y| \leq \delta_3 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \Rightarrow \alpha \geq c' > c$. ☐

52)